Präferenzen zu Zahlwerten I

Erster Versuch: Durchzählen

- a $\dot{>}$ b $\dot{>}$ c $\dot{>}$ d $\dot{>}$ e
- Zuordnung von Zahlenwerten durch eine Funktion V

  e → 1, d → 2, c → 3, b → 4, a → 5
- Es gilt: Wenn x $\dot{>}$ y, dann V(x) > V(y)
- Aber: Differenzen u. Verhältnisse nicht aussagekräftig

Zweiter Versuch: Lotterie

- Idee von Frank RAMSEY (1903-1930) zur Bestimmung des Gewißheitsgrades von Überzeugungen („belief”)
- Beispiel: Annette glaubt, morgen regne es wahrscheinlich nicht. – Mit welcher Wahrscheinlichkeit?

  Wette: Wenn Regen, dann zahlt Annette X Euro, und wenn Münze auf Zahl, bekommt Annette Y Euro.

  Wann empfindet Annette diese Wette als fair?

  Mit diesen Werten für X, Y gilt: P = Y/2X
- Übertragbar auf Präferenzen
- Beispiel: Wieviel lieber will Bert mit Claudia reden als mit Doris?

  Wette: Wenn Glücksrad auf den Feldern 1 bis X, Gespräch mit Claudia, wenn X+1 bis 100, dann mit Doris

  Wann empfindet Bert diese Wette als fair?

  Mit diesem X: V(Claudia) : V(Doris) = (100-X) : X

Präferenzen zu Zahlwerten II

- Eine Nutzensfunktion ist eine Funktion u, die jeder Konsequenz k aus K eine reelle Zahl zuordnet.
- Nutzensfunktionen heißen äquivalent, wenn sie dieselbe Präferenzordnung ergeben.
- Nutzenstheorem (NRS, S. 48): Die Nutzensaxiome garantieren die Existenz einer Nutzensfunktion.
- Existiert eine Nutzensfunktion, dann gibt es unendlich viele äquivalente Nutzensfunktionen.
- Für beliebige reelle Zahlen a, b mit $a > 0$ gilt:
  Wenn $u_1 = au_2 + b$, dann ist u_1 äquivalent zu u_2.
  - Verschieben, Stauchen/Strecken sind unschädlich.
  - Es gibt keine „Null" und keine „Einheit".
  - Differenzen und Summen sind irrelevant.
- Anwendung 1: „Normierung" der Nutzensfunktion

$$u(k_1) = 1,\ u(k_m) = 0$$

- (Normierte) Ramsey-Situation

	A	B
Wahl von l_1	p*.1	(1-p*).0
Wahl von l_2	1.x	

Annahme: $f \doteq g \Rightarrow 1.x = p^*.1 + (1-p^*).0$

$$\Leftrightarrow x = p^*$$

- Anwendung 2: Entscheidungsprobleme vereinfachen

Axiomatisierung des Nutzens

- Eine <u>Lotterie</u> l ist ein Zufallsmechanismus, bei dem jede mögliche Konsequenz k_i mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p_i auftritt.
- *Notation:* $l = (p_1k_1, p_2k_2, ..., p_mk_m)$
- Schachtelung von Lotterien ist möglich:
  - Jede Lotterie kann auch als Konsequenz aufgefaßt werden (z.B. Teilnahme an l_2 als Gewinn von l_1).
  - Jede Konsequenz kann auch als Lotterie mit der Wahrscheinlichkeit p=1 aufgefaßt werden.

Nutzensaxiome

(A1) *Ordnungsaxiom.* Die schwache Präferenzrelation R ist eine Ordnung, d.h. sie ist reflexiv, vollständig und transitiv.

(A2) *Reduktionsaxiom.* Kann eine zusammengesetzte Lotterie l_1 in eine einfache Lotterie l_2 überführt werden, dann gilt: $l_1 \doteq l_2$.

Bsp.: $l_1 = ((1-p_1)k1, p_1l_3)$ und $l_3 = (p_3k_2, (1-p_3)k_3)$

$\Rightarrow$ $l_1 = ((1-p_1)k1, p_1(p_3k_2, (1-p_3)k_3))$

$\Rightarrow$ $l_1 = ((1-p_1)k1, p_1p_3k_2, p_1(1-p_3)k_3)$

(A3) *Stetigkeitsaxiom.* Es gibt immer eine indifferente Lotterie nur mit der besten Konsequenz k_1 und der schlechtesten Konsequenz k_m als Ergebnis. D.h.:

Für alle k gibt es ein $p \in [0, 1]$, so daß $k \doteq (pk_1, (1-p)k_m)$

(A4) *Unabhängigkeitsaxiom.* $l_1 \doteq l_2 \Rightarrow (..., p_il_1, ...) \doteq (..., p_il_2, ...)$.

(A5) *Monotonieaxiom.* $(p_1k_1, (1-p_1)k_m) \stackrel{\bullet}{\geq} (p_2k_1, (1-p_2)k_m) \Leftrightarrow p_1 \geq p_2$.

Entscheiden unter Risiko

BEISPIEL 1	„1-2"	„3-6"
Setze auf „1-2"	2€	-1€
Setze auf „3-6"	1€	-2€

- Dominanz-Prinzip: Wähle das, was mindestens genauso gut ist wie alle anderen Optionen!

- Bayes-Prinzip: Maximiere die Nutzenserwartung!
- Thomas Bayes (1702-1761)
- Nutzenserwartung = Summe der Produkte aus Nutzen der Konsequenzen und ihrer Wahrscheinlichkeit

$$U(A) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot u(x_i)$$

BEISPIEL 1	x_1: „1-2"	x_2: „3-6"	Nutzens-erwartung
A: Setze auf „1-2"	(1/3).2€	(2/3)(-1€)	0€
B: Setze auf „3-6"	(1/3).1€	(2/3)(-2€)	-3€

BEISPIEL 2	x_1: „1-4"	x_2: „5-6"	Nutzens-erwartung
A: Setze auf „1-4"	(2/3).4€	(1/3).(-5€)	1€
B: Setze auf „5-6"	(2/3).(-4€)	(1/3).5€	-1€

BEISPIEL 3: Krieg & Frieden (Jeffrey 1965; NRS Kap1)

- DOMINANZ-PRINZIP

	Krieg	Frieden
Nicht abrüsten	Vernichtung der Menschheit	Aufrechterhaltung des Status quo
Abrüsten	Kommunistische Weltherrschaft	Goldenes Zeitalter

→ Abrüsten ist dominante Strategie

- BAYES-PRINZIP

	Krieg	Frieden	Nutzens-erwartung
Nicht abrüsten	0,2 x –2000	0,8 x 200	-240
Abrüsten	0,9 x –500	0,1 x 1000	-350

→ Nichtabrüsten maximiert Nutzenserwartung

- Konflikt zwischen Dominanz- und Bayes-Kriterium
- Wahrscheinlichkeiten ändern sich durch das Handeln
  → strategische Situation: ein Fall für die Spieltheorie!

BEISPIEL 4: Pascals Wette (Pensées Nr. 418/233)

„Wägen wir Gewinn und Verlust gegeneinander ab für den Fall, daß wir auf Kopf setzen, [d.h. darauf,] daß Gott existiert. Schätzen wir die folgenden zwei Möglichkeiten ab: Wenn sie gewinnen, gewinnen Sie alles; wenn Sie verlieren, verlieren Sie nichts.“

	Gott existiert	Gott existiert nicht
Glauben	„alles gewinnen“	„nichts verlieren“
Nicht glauben	„alles verlieren“	?

„Hier gibt es [...] eine Unendlichkeit unendlich glücklichen Lebens zu gewinnen bei einer Gewinnmöglichkeit gegenüber einer endlichen Zahl von Verlustmöglichkeiten; und was Sie ins Spiel einbringen, ist nur endlich.“

	Gott existiert	Gott exist. nicht	Nutzens-erwartung
Glauben	$p \times \propto$	$(1-p) \times f_1$	$\propto$
Nicht glauben	$p \times f_2$	$p \times f_3$	$< \propto$

Entscheiden bei Unwissenheit

Dominanz-Prinzip

Wähle die dominante Handlung!

- Dominant ist diejenige Handlung, die stets mindestens so gut ist wie alle anderen.
- Konflikt mit Bayes: Bei Unwissenheit kein Problem

Direkte Maximierungsstrategien

Maximin: Maximiere das Minimum des Gewinns! Minimax: Minumiere das Maximum der Kosten!

- „pessimistische" Strategie, risikoavers

Maximax: Maximiere das Maximum der Auszahlung!

- „optimistische" Strategie, risikofreudig
- Problem: Präferentielle „Abstände" unberücksichtigt

M1	A	B
f	10	11
g	9	1000

M2	A	B
f	0	1001
g	1000	999

Hurwicz-Kriterium

$$\text{Maximiere } \alpha.m_i + (1-\alpha).M_i!$$

- Pessimismus-Optimismus-Index α
- m_i = der niedrigste Nutzenswert der Konsequenzen der Handlung f_i
- M_i = der höchste Nutzenswert der Konsequenzen der Handlung f_i
- Verallgemeinerung aus Maximin und Maximax; diese sind Spezialfälle von Hurwicz: Mit α = 1 ergibt sich Maximin, mit α = 0 ergibt sich Maximax
- Problem 1: Wie findet man α? Ist α konstant?
- Problem 2: Nur Extremwerte werden berücksichtigt

H1	A_1	A_2	A_3	...	A_{100}
f	0	1	1	...	1
g	1	0	0	...	0

H2	A_1	A_2
f	0	1
g	1	0

Laplace-Kriterium

- „Bayes durch die Hintertür“
- Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit der Ereignisse
- Überführung in Entscheidung unter Risiko → Bayes

$$\boxed{\text{Maximiere die Nutzenserwartung!}}$$

- Äquivalent (wegen Gleichwahrscheinlichkeit):

$$\boxed{\text{Maximiere die Summe der Einzelnutzen!}}$$

- Problem: Einteilung der Ereignisse

H1	A_1	A_2	A_3	...	A_{100}
f	0	1	1	...	1
g	1	0	0	...	0

H2	A_1	A_2
f	0	1
g	1	0

Minimax-Verlust

Minimiere den maximalen Verlust!

- Verfahren:
  - Suche für jedes Ereignis (= in jeder Spalte) den höchsten Nutzenswert.
  - Errechne für alle Einträge in der Spalte die Differenz zu diesem höchsten Wert der Spalte.
  - Erstelle so die <u>Verlustmatrix</u> als Hilfsmittel.
  - Wende Minimax auf die Verlustmatrix an.
- Problem: Präferentielle Ordnung abhängig von anderen Alternativen

V1	A	B
f	1	10
g	2	7

V2	A	B
f	1	10
g	2	7
h	5	9

Verlust-matrix V1	A	B
f	1	0
g	0	3

$f \dot{>} g$

Verlust-matrix V2	A	B
f	4	0
g	3	3
h	0	1

$h \dot{>} g \dot{>} f$

Die Kriterien im Vergleich

B1	A	B	C
f	4	5	4
g	0	10	1
h	7	6	3
i	5	7	3

Dominanz:

Maximin:

Maximax:

Hurwicz:

Laplace:

Minimax-Verlust:

Verlustmatrix zu B1	A	B	C
f			
g			
h			
i			